Стоимость итерации $O(n^2)$

$\nabla f(x) = Ax - b$

число итераций $O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$!!

$f(x^N) - f(x_*) \le \frac{4LR^2}{N^2}$

Общие трудозатраты $= O\left(\frac{n^2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$

<u>ускор. метод Нестерова</u>		<u>Франк-Вульф</u>
$O\left(\frac{n^2}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	vs	$O\left(n^2 + \frac{n}{\varepsilon}\right)$

<u>SGD</u>

$O\left(\frac{n \ln n}{\varepsilon^2}\right)$

Лекция 10 Задачи с аффинными ограничениями

§4 пособия МЦНМО Гасников

$$\min_{\substack{Ax=b \\ x \in Q\ ?}} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$x \in \mathbb{R}^n$

Э Л П
Н И Р
Т Н О
Р Е Г
О Й Р.
П. Н

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \{c_i x_i + x_i \ln x_i\}$$

Двойственность.

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{A} \end{array}$$
$x \in \mathbb{R}^n$
$y \in \mathbb{R}^m$

$$\min_{\substack{Ax=b \,|\, y \\ x\in Q}} f(x) = \min_{x\in Q}\{f(x) + \underbrace{\max_y \langle y, Ax-b\rangle}_{= \begin{cases} 0, & Ax=b \\ +\infty, & Ax\neq b\end{cases}}\} =$$

$$= \min_{x\in Q} \max_y \{\underbrace{f(x) + \langle y, Ax-b\rangle}_{\text{вып. } x,\ \text{вогн. } y}\} =$$

Т. фон-Неймана-Сиона-Какутани

$$= \max_y \min_{x\in Q} \{f(x) + \langle y, Ax-b\rangle\} =$$

$Q = \mathbb{R}^n$, $[a_i, b_i]^n$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ $\Big\{$ $Q = S_n(1)$, $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$

$$\langle y, Ax-b\rangle = \langle y, Ax\rangle - \langle y, b\rangle =$$
$$= \langle A^T y, x\rangle - \langle y, b\rangle$$

$$= \max_y \Big\{ \underbrace{\min_{x_1,\dots,x_n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \big(f_i(x_i) + [A^T y]_i x_i\big)\Big\}}_{\sum_{i=1}^{n} \min_{x_i}\{f_i(x_i) + [A^T y]_i x_i\}} - \langle y, b\rangle \Big\} =$$

$f_i^*(z) = \max_{x_i}\{z x_i - f_i(x_i)\}$ — сопряж. ф-ция (по Фенхелю-Лежандру)

$$(\Box)$$

$$\ominus \max_y \left[-\left\{ \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\max_{x_i} \left\{ [-A^T y]_i x_i - f_i(x_i) \right\}}_{f_i^*(-[A^T y]_i)} \right\} - \langle y, b \rangle \right] \ominus$$

$$\ominus \max_y - \sum_{i=1}^{n} \left(f_i^*(-[A^T y]_i) - b_i y_i \right) =$$

$$= - \min_y \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i^*(-[A^T y]_i) + \langle b, y \rangle}_{\varphi(y) - \text{двойств. ф-ция}}$$

двойств. задача

$$\varphi(y) = -\min_x \{ f(x) + \langle y, Ax - b \rangle \}$$

$$\nabla \varphi(y) = b - Ax(y),$$ где $x(y)$ находится из реш. задач. (Π)

ф-ла Демьянова - Данскина

$$\varphi(y) = \min_x F(x, y) = F(x(y), y)$$

$$\underbrace{F_x'(x(y), y) \equiv 0 \quad \forall y}_{x(y) \text{ опред.}}$$

$$\nabla \varphi(y) = \left(\frac{\partial x}{\partial y} \cdot F_x' + F_y' \right) \Big|_{x = x(y)} \ominus$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\|_{i,j}$$

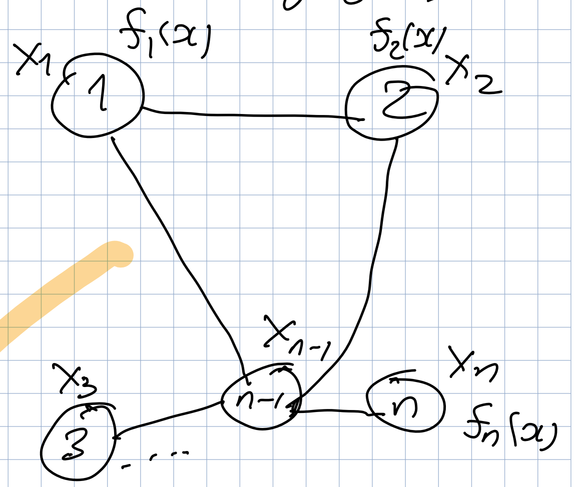
$$= \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Big|_{x=x(y)}$$

Пример (~~распределенная~~ децентр. оптимизация).

$$\min_{x} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

$$\downarrow$$

$$\min_{x_1=\ldots=x_n} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$



коммуник. граф G

матрица Лапласа

$$W = \|w_{ij}\|_{i,j=1,1}^{n,n}$$

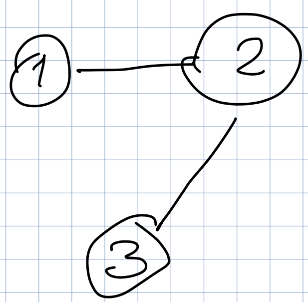
$$w_{ij} = 1, \quad (i,j) \in G$$

$$w_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin G$$

$$w_{ii} = -\deg_i$$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \preccurlyeq 0$$

$$\langle x, Wx \rangle \geq 0$$



$$Wx = 0 \iff x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \min_{Wx=0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

Wx – коммун. с соседями

$$\begin{bmatrix} * & \times & * \\ & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \\ \end{pmatrix}$$

может посчитать 1-ый узел

Двойств.

$y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, y_i – хранится в узле y_i.

$$x_i(y) = \max_{x_i} \{ \underbrace{[-Wy]_i}_{\text{i-ый узел получает при коммун.}} x_i - \underbrace{f_i(x_i)}_{\text{известно в i-м узле}} \}$$

$$\nabla \varphi(y) = -Wx(y)$$

$\dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial y_i}$ – это знает i-й узел.

$$y_i^{k+1} = y_i^k - h \frac{\partial \varphi(y^k)}{\partial y_i}, \quad i = \overline{1,n}$$

$$\boxed{y^{k+1} = y^k - h \nabla \varphi(y^k)}$$

Прямой

$$\min \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \qquad (\star)$$

множ. Лагранж. $\to y \mid Wx=0$

Замеч. 4.3 пособия Рогозина Гасникова

Метод штрафных ф-ций $(Pen)_\lambda \; \min_x \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \frac{\lambda}{2}\langle x, Wx\rangle$

$\|y_*\|_2 \le R$, $\lambda = \frac{R^2}{\varepsilon}$, ε - желаемая точность.

Теорема. Пусть $\lambda = \frac{R^2}{\varepsilon}$, и x_ε^λ - реш. задачи $(Pen)_\lambda$ с точн. ε (по ф-ции). Тогда x_ε^λ будет 3ε-реш. (по ф-ции) задачи $(\star)$, $\|Wx_\varepsilon^\lambda\|_2 \le \frac{\varepsilon}{R}$.

Слайдинг

$$\min_x \{f(x) + g(x)\} \qquad (\circ)$$

$\min f(x)$ $\qquad$ $\min g(x)$

$Df(x)$ $\qquad$ $Dg(x)$

$T_f \quad \# Df$ $\qquad$ $T_g \quad \# Dg$

ДЗ: (0) $\to$ $\left[\tilde{\Theta}(T_f) \# Df \text{ и } \hat{\Theta}(T_g) \# Dg\right]$

$$F(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + \frac{\lambda}{2}\langle x, Wx\rangle$$

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f_n/\partial x_n \end{pmatrix} + \lambda W \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Упр. 4.7 подробнее МЦНМО Гасников

Задача о распределении ресурсов

$$\min_{\substack{\sum_{i=1}^n x_i = C \\ x_i \geq 0}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

x_i — произв. объём

f_i — ф-ция затрат

План.

f_i — i-завод. $x_i(p)$ p — цена товара. рынок

$$\pi_i(p) = \max_{x_i \geq 0}\{p x_i - f_i(x_i)\}$$ — прибыль i-го собств.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i(p) = C}$$

$$\min_{p \mid \sum x_i = C} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) =$$

$$= \min_{x_1,\ldots,x_n} \max_{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) + p\left(C - \sum x_i\right) \right\} =$$

$$= \max_{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \min_{x_i} \left\{ f_i(x_i) - p x_i \right\} \right\} - pC =$$

$$-\max_{x_i} \left\{ p x_i - f_i(x_i) \right\}$$

$$-f_i^*(p)$$

$$= \max_{p} \; - \sum_{i=1}^{n} f_i^*(p) - pC =$$

$$= - \min_{p} \Big\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i^*(p) + pC}_{\varphi(p)} \Big\}$$

$$\varphi'(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - C = 0$$

$$x_i(p) = \operatorname{argmax}_{x_i} \left\{ p x_i - f_i(x_i) \right\}$$

$$\min_{p} \; \varphi(p)$$