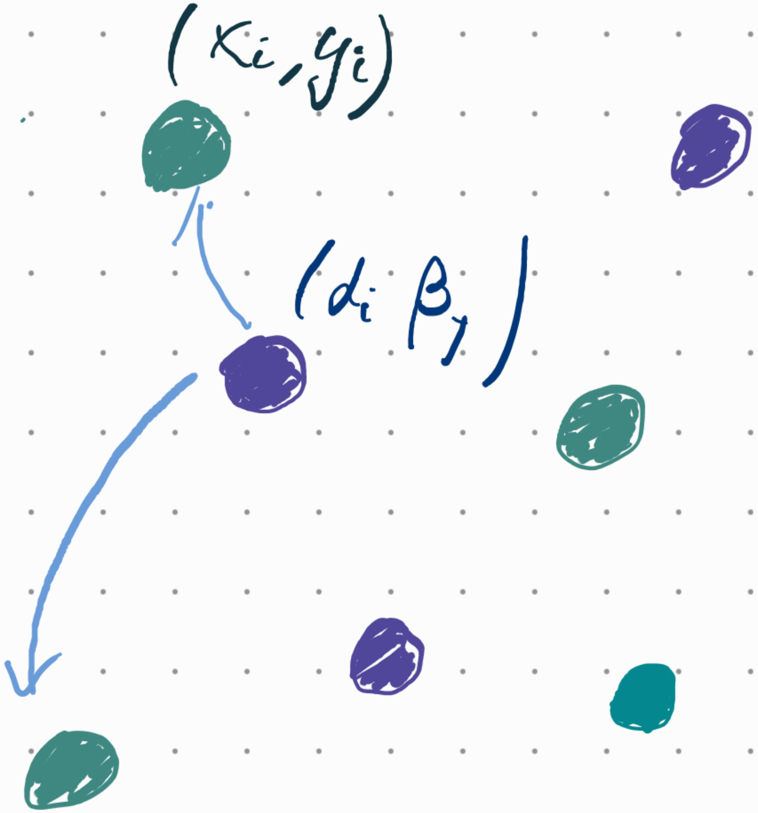
Задачи про булочные и магазины

Имеем:

- N булочных +
- M магазинов

Хотим:

min стоимость доставки



(x_i, y_i) координаты магазинов

(a_i, b_j) - координаты булочных

Задачи про булочные и магазины

Имеем:

- N булочных +
- M магазинов

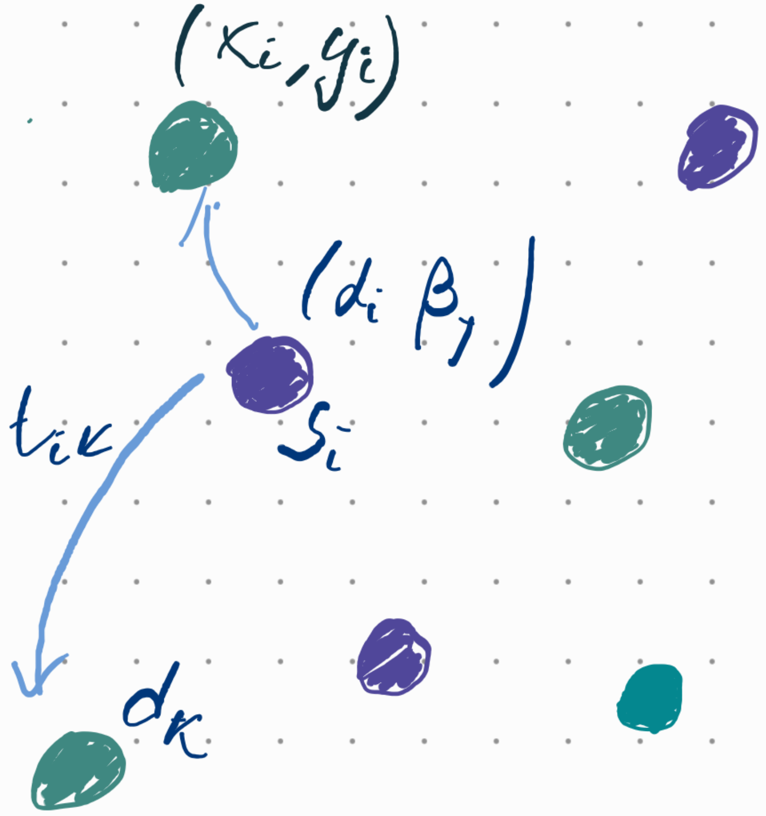
Хотим:

min стоимость доставки

d_j сколько надо булок в магазин j

t_{ij} сколько булок отправит i булочная в j магазин

s_i сколько всего булок поставляет булочная



Задачи про булочные и магазины

d_j сколько надо булок в магазин

t_{ij} сколько булок отправит i булочная в j магазин

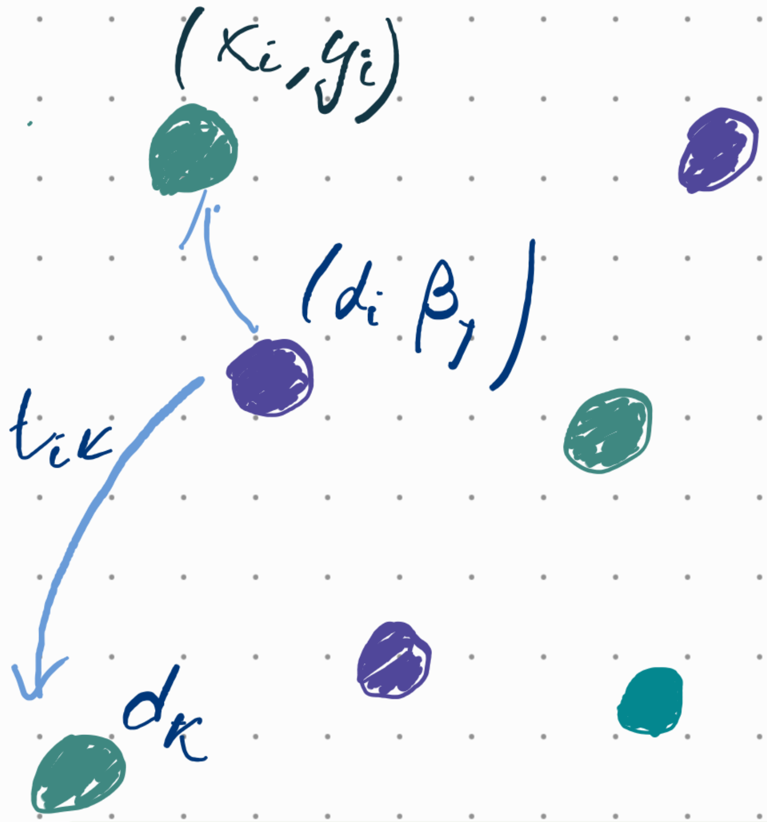
s_i сколько всего булок поставляет булочная

Какие у нас ограничения?

$\sum_j t_{ij} \le s_i$ не можем поставить больше изготовленного

$\sum_i t_{ij} = d_j$ сумма поставок = запросу

W_{ij} – матрица расстояний от булочной до магазина



$$\boxed{\sum_{ij} W_{ij} t_{ij} \to \min}$$

Общий вид задачи линейного программирования

$$\boxed{\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{s.t. } Ax = b \\ &\quad x \geq 0 \end{aligned}}$$

Порой задачи можно свести к задачам ЛП

Поиск разреженного базиса

есть $Ax = b$, тогда задача

$$\min \|x\|_1 \quad \text{s.t. } Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\min\ e^T \delta \\ &\text{s.t. } -\delta \leq x \leq \delta \\ &\quad Ax = b \end{aligned}$$

$$e = 1 \ldots 1$$

Почему мы так можем сделать?

l_1 norm: $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$

Минимизируем $\|x\|_1$ ограничиваем сверху $\|x\|_1 \le t$

Т.с $|x_i| \le \delta_i$ = $\sum \delta_i = t$

$-\delta_i \le x \le \delta_i \quad \sum \delta_i = t$

$\min e^T \delta$ уменьшение границ

s.t $-\delta \le x \le \delta$ ограничение x

$Ax = b$ – старое условие

$e = 1 \dots 1$

Когда мы можем решить задачу ЛП

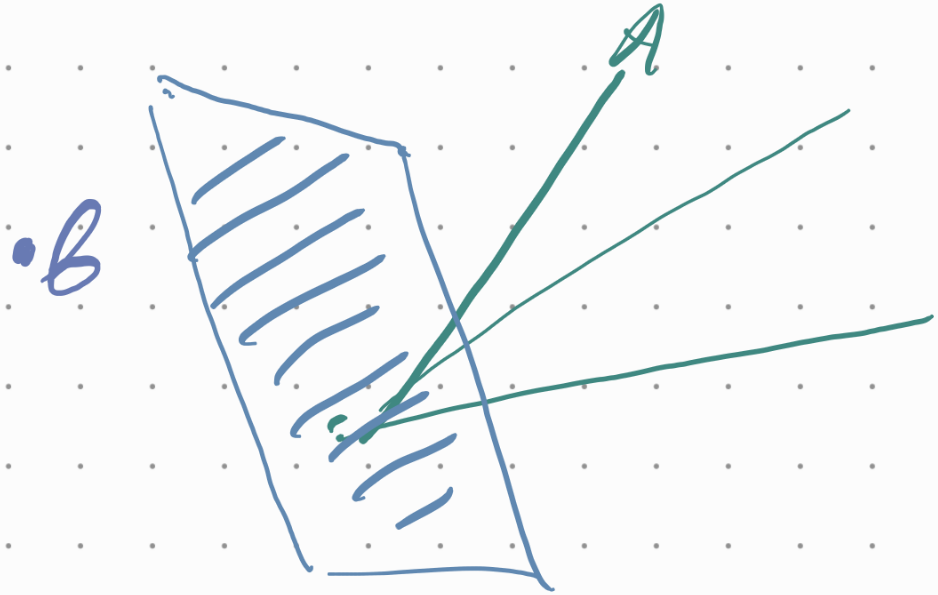
Лемма Фаркаса

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$,

тогда верно I либо II

I $\exists x \in \mathbb{R}^n: \ Ax = b, \ x \geq 0$

II $\exists y \in \mathbb{R}^n: \ y^T A \leq 0 \ \ y^T b \geq 0$



$\exists x \geq 0 \ \ Ax = b \ | \ y$

$x^T A^T y = b^T y \geq 0$

$x^T A^T y \geq 0 \ (x \geq 0) = y^T A \geq 0$ – противоречие

Пример линейно нерешаемост задача

$\max\ x_1 + x_2 + x_3$

s.t

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \quad y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 16$$

$y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ - certificate of feasibility